


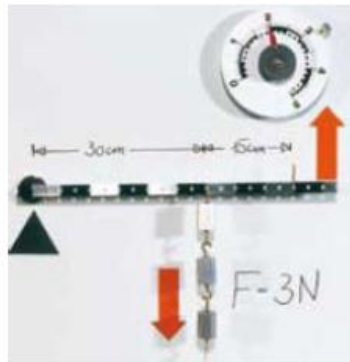
















**Forgatónyomaték, egyensúly, egyszerű gépek**  
**feladatok és megoldások**

1. Mekkora a forgatónyomatéka annak az 50N nagyságú erőt kifejtő szerelőkulcsnak, ha a szerelőkulcs hossza 30 cm és az erő hatásvonala merőleges rá? Mekkora lesz a forgatónyomaték, ha az erőkart a felére csökkentjük, de az erő nagyságát megháromszorozzuk? 
2. Egy 50kg-os és egy 30kg-os gyermek mérleghintázik. Az 50kg-os fiú 1,5m-re ül a forgástengelytől. Hova üljön a másik gyermek, hogy egyensúlyban legyenek? 
3. Egy 45 cm hosszúságú, elhanyagolható tömegű rúdra a forgástengelytől 30 cm-re egy  $m=0,3$  kg tömegű testet akasztunk. Mekkora erővel kell az ábra szerint rúd másik végét emelnünk, hogy a rúd továbbra is vízszintes maradjon? 



**ábra: A forgatónyomatékok egyenlőségét a forgástengelyre áll fenn.**

4. Két tanuló az iskolatáskáját egy 60cm hosszú rúdra szeretné felakasztani. Hol kell a rudat alátámasztaniuk, ha az egyik táska 5kg, míg a másik 8kg tömegű? 
5. Egy autót két párhuzamos hatásvonalú, megegyező irányú erővel tol két ember. Mekkora nagyságú erőt fejt ki az egyik ember, ha az eredő erejük 200 N nagyságú, és a másik ember 80 N nagyságú erővel tolja az autót? Milyen távolságra van az eredő hatásvonala a nagyobbik erő hatásvonalától, ha a két ember 120 cm-re áll egymástól? Rajzold le a ható erőket és az eredőt! 
6. Egy 4 m hosszúságú mérleghinta egyik végére ült Józsi, akinek tömege 40 kg. A másik végére Eszter ül, aki 30 kg-os. Hova ültessék Feri nevű kistestvérüket, akinek tömege 25 kg? 
7. Egy testre egymástól 60 cm távolságban két párhuzamos hatásvonalú, ellentétes irányú erő hat, amelynek nagysága 150 N és 60 N. Számítsuk ki az eredő nagyságát és határozzuk meg a hatásvonalának helyét! 

8. Egy erőpár forgatónyomatéka  $12 \text{ Nm}$ , a ható erők nagysága  $8 \text{ N}$ . Mekkora a hatásvonalaik távolsága? 
9. Egy  $600 \text{ N}$  súlyú terhet  $l$  hosszúságú rúdon ketten emelnek úgy, hogy a teher a rúd egyik végétől kétszer olyan távolságra van a rúdra függesztve, mint a másiktól. Mekkora erőket kell a teher felemeléséhez a rúd végére kifejteni? 
10. Egy vándor  $12 \text{ kg}$  terhet visz a vállán. A terhet a bot egyik végére akasztotta, míg a bot közepét vállával alátámasztotta. A bot másik végén kezében fogva vízszintesen tartja a botot. Mekkora erővel nyomja a bot a vándor vállát? Mekkora lenne a vállát nyomó erő, ha a botot a vállán a teher felőli egyharmad hosszban támasztaná alá? 
11. Ásóval földdarabot emelünk. Egyik kezünkkel az ásó nyelét  $100 \text{ N}$  nagyságú erővel emeljük, míg a másik kezünkkel az ásó nyelének végét  $55 \text{ N}$  erővel lefelé nyomjuk. Mekkora földdarab tömege és milyen hosszú az ásó, ha a két kezünk távolsága  $50 \text{ cm}$ . 
12. Egy előadáson az előadóművész egy  $250 \text{ kg}$  tömegű,  $10 \text{ m}$  hosszú, víz fölé lógó homogén tömegeloszlású gerendán játszik. A gerenda az egyik végén, és a másik végétől  $2,5 \text{ m}$ -re van alátámasztva. Kisétálhat-e a gerenda végére a  $70 \text{ kg}$  tömegű előadóművész? Mekkora erők hatnak ekkor az alátámasztási pontokban? 
13. A  $6 \text{ m}$  hosszú ugródeszka egyik végén és ettől  $1,2 \text{ m}$  távolságban van megerősítve. A deszka szabad végén egy  $60 \text{ kg}$  tömegű műugró áll. Mekkora és milyen irányú erők hatnak a deszka rögzítési pontjaiban? 
14. Egy talicskával egyszerre  $80 \text{ kg}$  földet szeretnénk eltolni. Mekkora erővel kell megemelnünk a talicskát, hogyha a talicska hossza  $1,4 \text{ m}$ , a teher tömegközéppontja pedig  $0,3 \text{ m}$ -re van a kerék középpontjától? 
15. Egy csípőfogó markolatának végére kezünkkel  $20 \text{ N}$  nagyságú erőt fejtünk ki. A csípőfogó vágóél felőli hossza  $10 \text{ mm}$ , míg a markolat hossza  $8 \text{ cm}$ . Mekkora erő éri elvágás közben a rézdrótot? 
16. Egy építkezésen a  $4 \text{ kg}$  tömegű mozgócsigára egy  $30 \text{ kg}$  össztömegű téglával megrakott vödröt akasztanak. Mekkora erővel húzhatjuk felfelé egyenletesen a vödröt? Mekkora erővel húzhatjuk egyenletesen felfelé a vödröt? Mekkora erőt fejt ki egyenletes mozgatáskor a kötélt a felfüggesztési pontra? 
17. Egy működő kerekes kút hengerének sugara  $10 \text{ cm}$ , míg a hajtókar sugara  $60 \text{ cm}$ . Mekkora erővel lehet a kútból felhúzni a  $20 \text{ kg}$  tömegű, vízzel teli vödröt? 

18. A gémeskút 200 kg-os kútgémének egyik fele 4m, míg a másik fele 6m hosszúságú. A kútgém hosszabbik végén vödör lóg, mely vízzel teli tömege 25kg. Mekkora tömegű fahasábot (koloncot) rögzítettek a gémeskút kútgémének szabad végéhez, hogy a gémeskút vízszintes helyzetben éppen egyensúlyi helyzetben van?



### Megoldások

1. Adatok:

$$F=50\text{N}$$

$$d=30\text{cm}=0,3\text{m}$$

a)  $M=?$

b)  $M'=?$

- a) A forgatónyomaték definíciója alapján:

$$M=F \cdot d=50\text{N} \cdot 0,3\text{m}=15\text{Nm},$$

b) 
$$M' = 3F \cdot \frac{d}{2} = 1,5F \cdot d = 1,5M = 22,5\text{Nm}.$$

A szerelőkulcs által kifejtett forgatónyomaték első esetben 15 Nm, míg a szerelőkulcs hosszát felére csökkentve 22,5 Nm.

2. Adatok:

$$m_1=50\text{kg}$$

$$m_2=30\text{kg}$$

$$d_1=1,5\text{m}$$

$$d_2=?$$

A mérleghinta akkor lesz egyensúlyban, ha  $F_1 \cdot d_1 = F_2 \cdot d_2$ .

$$\text{Ebből } d_2 = \frac{F_1}{F_2} \cdot d_1 = \frac{m_1 g}{m_2 g} \cdot d_1 = \frac{500\text{N}}{300\text{N}} \cdot 1,5\text{m} = 2,5\text{m}.$$

A másik gyermek a forgástengelytől 2,5 m-re üljön, az elsővel ellentétes oldalon.



3.

$$l = 45 \text{ cm} = 0,45 \text{ m}$$

$$d_1 = 30 \text{ cm} = 0,3 \text{ m}$$

$$m = 0,3 \text{ kg}$$

$$d_1 = ?$$

A forgástengelyre a forgatónyomatékok egyenlőségét felírva:

$$F l = m g d_1$$

Innét:

$$F = 2 \text{ N.}$$

A rúd végét 2 N erővel kell emelnünk.

4.

### Megoldás:

Adatok:

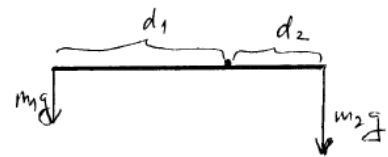
$$m_1 = 5 \text{ kg}$$

$$m_2 = 8 \text{ kg}$$

$$l = 60 \text{ cm} = 0,6 \text{ m}$$

$$d_1 = ?$$

$$d_2 = ?$$



73. ábra: A felfüggesztési pont a nagyobb tömegű táskához lesz közelebb.

A táskák közös tömegközéppontjára felírjuk a forgatónyomatékok egyenlőségét. ( $l = d_1 + d_2$ )

$$m_1 g \cdot d_1 = m_2 g \cdot (l - d_1)$$

A  $d_1$ -et kifejezve:

$$d_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot l$$

Behelyettesítve:

$$d_1 = \frac{8 \text{ kg}}{5 \text{ kg} + 8 \text{ kg}} \cdot 0,6 \text{ m} = 0,37 \text{ m}$$

$$d_2 = 0,23 \text{ m}$$

A rudat a nehezebb táskától 23 cm-re kell alátámasztani.

5. Adatok:

$$F_e = 200 \text{ N,}$$

$$F_2 = 80 \text{ N,}$$

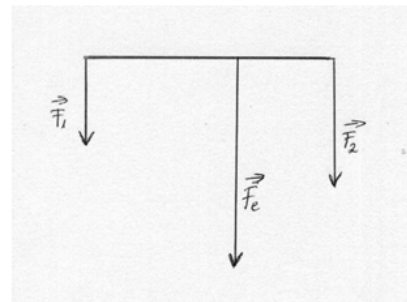
$$d = 120 \text{ cm} = 1,2 \text{ m}$$

Az első ember által kifejtett erő nagysága  $F_1 = 120 \text{ N}$ . Az eredő hatásvonalára nézve a két összetevő forgatónyomatéka egyenlő:

$$F_1 x = F_2 \cdot (d-x).$$

Az egyenletbe az adatokat behelyettesítve  $x = 0,48 \text{ m}$ .

Az eredő hatásvonala a nagyobbik erő hatásvonalától  $0,48 \text{ m}$ -re van.



74. ábra: Párhuzamos, megegyező irányú erők esetén az eredő a két hatásvonal között helyezkedik el.

6. Adatok:

$$L = 4 \text{ m,}$$

$$m_1 = 40 \text{ kg,}$$

$$m_2 = 30 \text{ kg.}$$

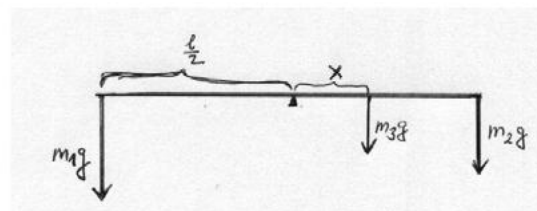
$$m_3 = 25 \text{ kg.}$$

A mérleghinta forgástengelyére felírva a forgatónyomatékokat:

$$m_1 g \cdot \frac{1}{2} = m_2 g \cdot \frac{1}{2} + m_3 g \cdot x,$$

amelyből  $x = 0,8 \text{ m}$ .

Ferinek  $0,8 \text{ m}$ -re kell ülnie a mérleghinta forgástengelyétől Eszter oldalán.



A forgástengelyre nézve a forgatónyomatékok egyenlőségének fenn kell állnia.

7. Adatok:

$$F_1 = 150 \text{ N,}$$

$$F_2 = 60 \text{ N}$$

$$d = 60 \text{ cm} = 0,6 \text{ m.}$$

$$F_e = ?$$

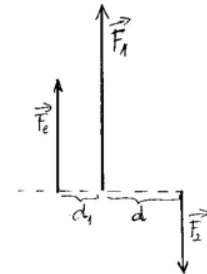
Az eredő nagysága  $F_e = 90 \text{ N}$ , hatásvonala párhuzamos az összetevőkkel.

Hatásvonalának távolsága legyen az  $F_1$ -től  $d_1$ ,  $F_2$ -től  $d_2$ . Az eredő hatásvonalára felírjuk a két összetevő forgatónyomatékát:

$$F_1 \cdot d_1 = F_2 \cdot d_2.$$

Az egyenletbe a megadott adatokat behelyettesítve:  $d_1 = 0,4 \text{ m}$ ,  $d_2 = 1 \text{ m}$ .

Az eredő nagysága  $90 \text{ N}$ . Az eredő hatásvonala a két összetevő hatásvonalán kívül, a nagyobbik összetevő oldalán helyezkedik el, tőle  $0,4 \text{ m}$  távolságra.



ábra: Két párhuzamos hatásvonalú, ellentétes irányú erő esetén az eredő a két hatásvonalon kívül, a nagyobbik oldalán helyezkedik el.

8. Adatok:

$$M = 12 \text{ Nm,}$$

$$F = 8 \text{ N}$$

$$d = ?$$

Az erőpár forgatónyomatékát felírva:  $M = F \cdot d$ , amelyből:

$$d = \frac{M}{F} = \frac{12 \text{ Nm}}{8 \text{ N}} = 1,5 \text{ m.}$$

Az erőpár két összetevőjének hatásvonala  $1,5 \text{ m}$  távolságra helyezkedik el egymástól.

9.

**Megoldás:**

Adatok:

$$mg = 600 \text{ N,}$$

$$d_1 = \frac{1}{3},$$

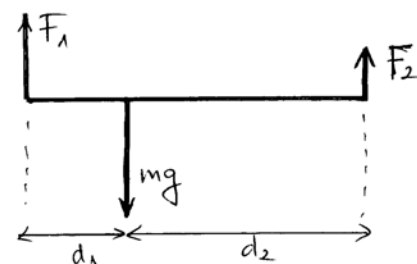
$$d_2 = \frac{2}{3} \cdot 1.$$

$$F_1 = ?$$

$$F_2 = ?$$

A rúdra a nehézségi erőn kívül az  $F_1$  és  $F_2$  erő hat. Legyen az  $F_1$  támadáspontja a forgástengely, akkor

$$0 = F_2 \cdot l - mg \cdot d_1.$$



ábra: A teherhez közelebb, vagy távolabb kell nagyobb erőt kifejteni?

Az  $F_2$  nagysága:

$$F_2 = mg \cdot \frac{d_1}{l}$$

Behelyettesítve:

$$F_2 = 600N \cdot \frac{\frac{1}{3}}{1} = 200N.$$

A testre ható erők eredője nulla, így

$$0 = F_1 + F_2 - mg.$$

Ebből:

$$F_1 = mg - F_2 = 600N - 200N = 400N.$$

10.

Adatok:

$$m = 12\text{kg}$$

a)  $F_1 = ?$

b)  $F_1' = ?$ , ha  $d = \frac{1}{3}$

a) A botra ható erők: a teher  $mg$  nehézségi ereje és az  $F_1$ ,  $F_2$  erők. A rúd vízszintes és egyensúlyban van, így  $F_2 = mg$ .

$$F_1 = F_2 + mg = 2mg.$$

Behelyettesítve:

$$F_1 = 240N, \quad F_2 = 120N.$$

A bot a vándor vállát 240N erővel nyomja.

Az  $F_1'$  támadáspontját véve forgástengelynek:

$$0 = F_2' \cdot \frac{2}{3}l - mg \cdot \frac{1}{3},$$

$$F_2' = \frac{mg}{2} = 60N.$$

Az erők eredője nulla, így

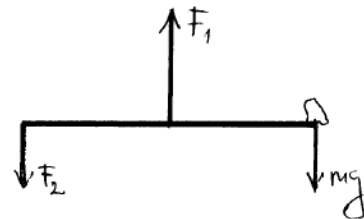
$$0 = F_1' - F_2' - mg,$$

$$F_1' = F_2' + mg.$$

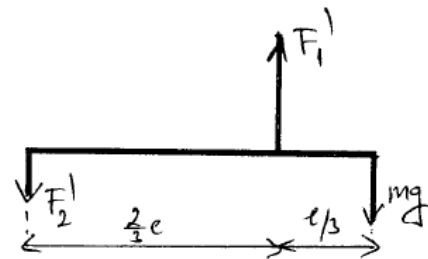
Behelyettesítve:

$$F_1' = 60N + 120N = 180N.$$

VISSZA



78. ábra: A vándor vállának mely erőket kell kiegyensúlyoznia?



79. ábra: Hogyan tudná csökkenteni a vállára ható nyomóerőt?

11.



Adatok:

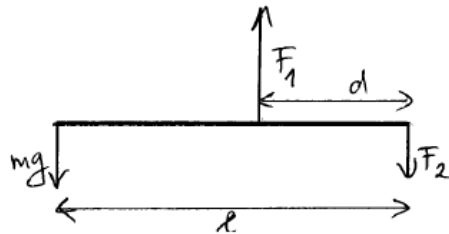
$$F_1=100\text{N},$$

$$F_2=55\text{N},$$

$$d = 50\text{cm} = 0,5\text{m}.$$

$$mg=?$$

$$l=?$$



80. ábra: Milyen irányú erőt fejtünk ki kezünkkel az ásónyéltre?

Az ásó rúdjaára az erők merőlegesen hatnak. A rúd egyensúlyban van, ezért a rá ható erők eredője nulla.

$$0=F_1-F_2-mg.$$

Ebből:

$$mg=F_1-F_2=45\text{N}.$$

A földdarab tömege 4,5kg.

Az egyensúlyban lévő test forgatónyomatékainak előjeles összege is nulla. Legyen az mg támadáspontja a forgástengely:

$$F_1 \cdot (l-d) = F_2 \cdot l.$$

Ebből

$$l = \frac{F_1}{F_1 - F_2} \cdot d = 1,1\text{m}.$$

A földdarab tömege 4,5 kg, míg az ásó hossza 1,1 m.

12.



Adatok:

$$M=250\text{kg},$$

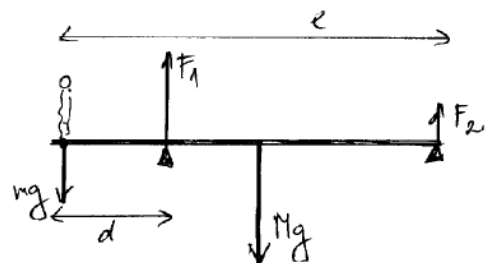
$$m=70\text{kg},$$

$$l=10\text{m},$$

$$d = 2,5\text{m}.$$

$$F_1=?$$

$$F_2=?$$



ábra: Sorolja fel a deszkára ható erőket, és írja fel az erők forgatónyomatékát!

A gerenda egyensúlyban van, tehát a testre ható erők eredője nulla és a forgatónyomatékok előjeles összege szintén nulla.

A forgástengelyt az  $F_1$  támadáspontjában vegyük fel.

$$0=F_1+F_2-mg-Mg, \quad (1)$$

$$0 = F_2 \cdot (l-d) - Mg \cdot \left(\frac{l}{2} - d\right) + mg \cdot d. \quad (2)$$

A (2) összefüggés alapján  $F_2$  meghatározható.

$$F_2=600\text{N}.$$



Az (1) egyenlet alapján:

$$F_1 = (M+m) \cdot g - F_2,$$

Behelyettesítve:

$$F_1 = 2600 \text{ N}.$$

Az előadóművész kisétálhat a deszka végére. Az alátámasztási pontokban fellépő erők:

$$F_1 = 2600 \text{ N},$$

$$F_2 = 600 \text{ N}.$$

13.

Adatok:

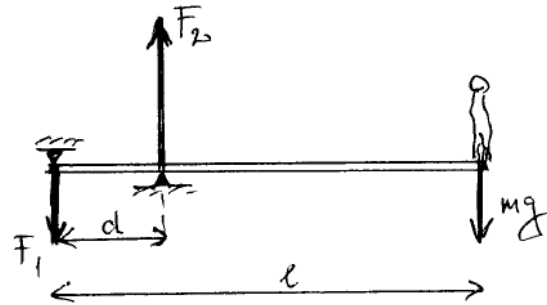
$$l = 6 \text{ m},$$

$$d = 1,2 \text{ m},$$

$$m = 60 \text{ kg}.$$

$$F_1 = ?$$

$$F_2 = ?$$



Az ugródeszkára a nehézségi erőn kívül az alátámasztási pontokban hat erő. Mivel a testre ható erők eredője nulla, ezért  $F_1$  lefelé, míg  $F_2$  felfelé hat.

ábra: A rögzítési pontokban milyen irányú erő hat? Melyik erő nagysága a nagyobb?

Az  $F_1$  támaszpontjában írjuk fel a forgatónyomatékokat:

$$0 = F_2 \cdot d - mg \cdot l.$$

Ebből:

$$F_2 = mg \cdot \frac{l}{d}.$$

Behelyettesítve:

$$F_2 = 600 \text{ N} \cdot \frac{1,2 \text{ m}}{6 \text{ m}} = 120 \text{ N}.$$

Az ugródeszkára ható erők eredője nulla, így:

$$0 = F_2 - F_1 - mg,$$

$$F_1 = F_2 - mg.$$

Az adatokat behelyettesítve:

$$F_1 = 120 \text{ N} - 600 \text{ N} = -480 \text{ N}.$$

Az  $F_1$  iránya ellentétes az  $F_2$  irányával.

A deszkára az alátámasztásban felfelé 120 N erő hat, míg a deszka végén 480 N nagyságú erő hat lefelé.

14.

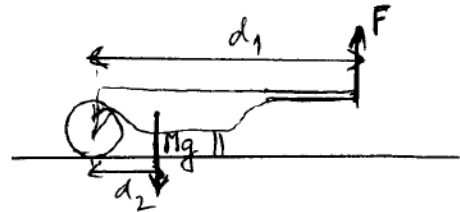
Adatok:

$$M=80\text{kg},$$

$$d_1=1,4\text{m},$$

$$d_2 = 0,3\text{m}.$$

$$F=?$$



ábra: A talicska egy egykarú emelő

A talicska egykarú emelőként működik. A talicska kerekét választjuk forgástengelynek, így a forgatónyomatékok egyenlőségét felírva:

$$F \cdot d_1 = Mg \cdot d_2.$$

A talicskát emelő erő:

$$F = Mg \cdot \frac{d_2}{d_1}.$$

Behelyettesítve:

$$F = 800\text{N} \cdot \frac{0,3\text{m}}{1,4\text{m}} = 171,4\text{N}.$$

A talicskát 171,4 n nagyságú erővel kell megemelnünk.

15. Adatok:

$$F_1=20\text{ N},$$

$$d_1=10\text{mm}=1\text{ cm},$$

$$d_2 = 8\text{cm}.$$

$$F_2=?$$

A csípőfogó kétkarú emelőként működik. A forgatónyomatékok egyenlőségéből:

$$F_1 \cdot d_1 = F_2 \cdot d_2.$$

Behelyettesítve:

$$F_2=25\text{N}.$$

A rézdrótra vágás közben 25 N nagyságú erő hat.

16.

Adatok:

$$m = 4\text{kg},$$

$$M = 30\text{kg}.$$

$$F = ?$$

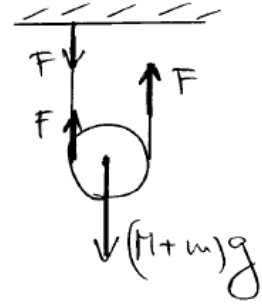
A mozgósiga mindkét kötélzárban  $F = \frac{(M+m) \cdot g}{2}$  nagyságú erő hat.

A vödört felfelé  $F = \frac{(M+m) \cdot g}{2}$  nagyságú erővel húzhatjuk. A kötél a felfüggesztési pontra  $F$  erővel hat.

Behelyettesítve:

$$F = 170\text{N}.$$

A vödört 170 N nagyságú erővel húzhatjuk egyenletesen felfelé. A felfüggesztési pontra a kötél 170 N nagyságú erőt fejt ki.



ábra: A mozgósigára akasztott teher súlya a kötél két szárában egyenlő arányban oszlik meg?

VISSZA

17.

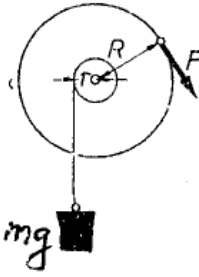
Adatok:

$$r = 10\text{cm},$$

$$R = 50\text{cm},$$

$$m = 20\text{kg}.$$

$$F = ?$$



ábra: Milyen előjelű az  $mg$  és az  $F$  erő forgatónyomatéka?

A hengerkerék középpontjára felírva a forgatónyomatékok egyenlőségét:

$$0 = F \cdot R - mg \cdot r.$$

Az  $F$  értéke:

$$F = 40\text{N}.$$

A kerekes kúttal 40 N erővel lehet felhúzni a 20 kg tömegű vödört.

18.

Adatok:

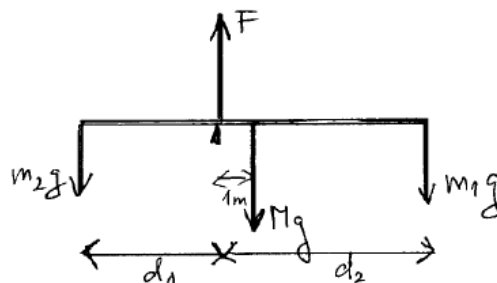
$$d_1 = 4\text{m},$$

$$d_2 = 6\text{m},$$

$$m_1 = 25\text{kg},$$

$$M = 200\text{kg}.$$

$$m_2 = ?$$



ábra: Milyen irányú lesz a kútgémre ható erők forgatónyomatéka?

VISSZA

A kútgémre az  $Mg$  nehézségi erőn kívül a vödör  $m_1g$  súlya, a fahasáb (kolonc)  $m_2g$  súlya és a  $F$  erő hat.

A testre ható forgatónyomatékok előjeles összege a kútgém bármely pontjára nulla. Írjuk fel a forgatónyomatékokat az  $F$  erő támadáspontjára.

$$0 = m_2g \cdot d_1 - Mg \left( \frac{l}{2} - d_2 \right) - m_1g \cdot d_2.$$

Behelyettesítve:

$$m_2 = 87,5 \text{ kg}.$$

87,5 kg tömegű fahasábot (koloncot) rögzítettek a gémeskút kútgémének szabad végéhez.